Formule des compléments

[Amar - Matheron]

Thm : $\forall z \in \{s \in \mathbb{C}, 0 < \mathrm{Re}\, s < 1\}$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$.

Lemme : $\forall \alpha \in]0,1[$, $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$

· I_α est bien définie car $\dfrac{1}{t^\alpha(1+t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ intégrable sur $]0,1[$ et $\dfrac{1}{t^\alpha(1+t)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$ intégrable au voisinage de $+\infty$

Posons $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $f : \Omega \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto (z^\alpha(1+z))^{-1}$ où $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$ si $z = re^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$.

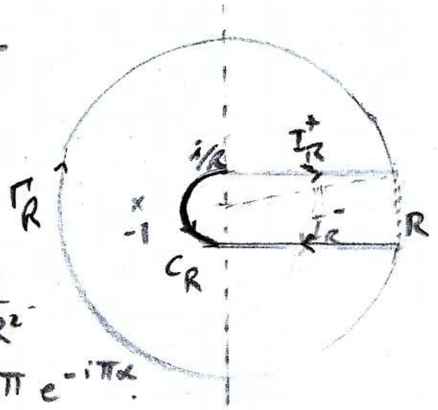
La fonction f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{-1\}$ et possède un pôle simple en -1,
$\mathrm{Res}(f,-1) = \lim\limits_{z\to -1} (1+z) f(z) = e^{-i\pi\alpha}$.

Pour $R > 1$, on définit : $\gamma_R = C_R \cup I_R^+ \cup \Gamma_R \cup I_R^-$

$C_R = \{\frac{1}{R} e^{i\theta}, \theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]\}$

$I_R^\pm = [\pm \frac{i}{R}, \pm\frac{i}{R} + \sqrt{R^2 - \frac{1}{R^2}}]$

$\Gamma_R = \{Re^{i\theta}, \theta \in [\theta_R, 2\pi - \theta_R]\}$, $\theta_R = \arcsin \frac{1}{R^2}$



Par le thm des résidus, $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2i\pi\, e^{-i\pi\alpha}$.

· $\displaystyle\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{R^\alpha e^{-i\alpha\theta}}{1 + \frac{1}{R}e^{i\theta}} \frac{i}{R} e^{i\theta}\,d\theta\right| \leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} R^\alpha \frac{d\theta}{|1+Re^{i\theta}|} \leq \frac{\pi R^\alpha}{R-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

· $\displaystyle\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\theta_R}^{2\pi-\theta_R} \frac{R^{-\alpha}e^{-i\alpha\theta}}{1+Re^{i\theta}} iRe^{i\theta}\,d\theta\right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{R^{1-\alpha}}{|1+Re^{i\theta}|}\,d\theta = 2\pi \frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$

· $\displaystyle\int_{I_R^+} f(z)\,dz = \int_0^{\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}} \frac{dt}{(t+\frac{i}{R})^\alpha(1+t+i/R)} \xrightarrow[R\to+\infty]{\text{CVD}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$ par CVD par $t \mapsto \dfrac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)}{t^\alpha(1+t)}$

car $(t+\frac{i}{R})^\alpha = \left(\sqrt{t^2+\frac{1}{R^2}} \exp(i \arctan \frac{1}{Rt})\right)^\alpha$.

· $\displaystyle\int_{I_R^-} f(z)\,dz = \int_0^{\sqrt{R^2-1/R^2}} \frac{\overset{\text{sens}}{-1}\,dt}{(t-i/R)^\alpha(1+t-i/R)} \xrightarrow[R\to+\infty]{\text{CVD}} -e^{-2i\pi\alpha} I_\alpha$

car $(t-i/R)^\alpha = \left(\sqrt{t^2+\frac{1}{R^2}} \exp(2i\pi - i\arctan\frac{1}{Rt})\right)^\alpha$

Donc $(1-e^{-2i\pi\alpha}) I_\alpha = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$ i.e. $I_\alpha = \dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$. □

Soit $\alpha \in]0,1[$. Par le théorème de Fubini :

$\displaystyle\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt\right)\left(\int_0^{+\infty} s^{-\alpha}e^{-s}\,ds\right) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha e^{-(s+t)} \frac{1}{\frac{s}{t}+1} \frac{s/t+1}{t}\,ds\,dt$

Posons $\begin{cases} u = s+t \\ v = s/t \end{cases}$ de jacobien $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{t} & -s/t^2 \end{vmatrix} = \dfrac{1+s/t}{t}$. Par CVAR :

$\displaystyle\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{v^{-\alpha}e^{-u}}{v+1}\,du\,dv \underset{\text{Fubini}}{=} \left(\int_0^{+\infty} e^{-u}\,du\right)\left(\int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^\alpha(v+1)}\right) = I_\alpha = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$.

Par prolongement analytique ($]0,1[$ a une infinité de pts d'acc) on conclut.